ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————o0o———————

NGUYỄN VĂN HẢI

THUẬT TOÁN ĐIỂM GẦN KỀ ĐƯỜNG DỐC NHẤT GIẢI MỘT LỚP BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN TRONG KHÔNG GIAN BANNACH

THÁI NGUYÊN, 10/2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————o0o———————

NGUYỄN VĂN HẢI

THUẬT TOÁN ĐIỂM GẦN KỀ ĐƯỜNG DỐC NHẤT GIẢI MỘT LỚP BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN TRONG KHÔNG GIAN BANNACH

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 8460112

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

TẬP THỂ GIÁO VIÊN HƯỚNG DẪN
GS.TS. NGUYỄN BƯỜNG
TS. NGUYỄN THỊ THÚY HOA

THÁI NGUYÊN, 10/2018

Mục lục

Bảng ký hiệu

H	không gian Hilbert thực
E	không gian Banach
E^*	không gian đối ngẫu của E
S_E	mặt cầu đơn vị của E
$\mathbb{R}$	tập các số thực
$\mathbb{R}^+$	tập các số thực không âm
$\emptyset$	tập rỗng
$\forall x$	với mọi x
$\mathcal{D}(A)$	miền xác định của toán tử A
$\mathcal{R}(A)$	miền ảnh của toán tử A
A^{-1}	toán tử ngược của toán tử A
I	toán tử đồng nhất
$d(x, C)$	khoảng cách từ phần tử x đến tập hợp C
$\limsup_{n\to\infty} x_n$	giới hạn trên của dãy số $\{x_n\}$
$\liminf_{n\to\infty} x_n$	giới hạn dưới của dãy số $\{x_n\}$
$x_n \to x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về x_0
$x_n \rightharpoonup x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu về x_0
J	ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc
j	ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc đơn trị
$\mathrm{Fix}(T)$	tập điểm bất động của ánh xạ T
∂f	dưới vi phân của hàm lồi f

Mở đầu

Cho E là không gian Banach thực. Ký hiệu E^* là không gian liên hợp của E, $\langle x^*, x\rangle$ là giá trị của phiếm hàm tuyến tính liên tục $x^* \in X^*$ tại $x \in E$ và chuẩn của E và * đều ký hiệu là $\|\cdot\|$. Bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian Banach E được phát biểu như sau: Cho C là một tập con lồi đóng, khác rỗng của không gian Banach thực E, $F : E \to E$ là một ánh xạ xác định trên E.

$$\text{Tìm phần tử } x^* \in C \text{ sao cho } \langle F(x^*), j(x - x^*)\rangle \geq 0 \quad \forall x \in C, \quad (1)$$

ở đây j là ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc đơn trị của E, ánh xạ F là ánh xạ giá, C là tập ràng buộc.

Bài toán bất đẳng thức biến phân được giới thiệu lần đầu tiên vào năm 1966 khi P. Hartman và G. Stampacchia công bố những nghiên cứu đầu tiên của mình về bất đẳng thức biến phân liên quan tới việc giải các bài toán biến phân, bài toán điều khiển tối ưu và các bài toán biên trong lý thuyết phương trình đạo hàm riêng. Bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian vô hạn chiều và các ứng dụng của nó được giới thiệu trong cuốn sách "An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications" của D. Kinderlehrer và G. Stampacchia xuất bản năm 1980 và trong cuốn sách "Variational and Quasivariational Inequalities: Applications to Free Boundary Problems" của C. Baiocchi và A. Capelo xuất bản năm 1984.

Luận văn trình bày ba phương pháp giải bài toán bất đẳng thức biến phân (1) trong không gian Banach lồi đều, có chuẩn khả vi Gâteaux đều với tập ràng buộc C là tập không điểm chung của các ánh xạ m-j-đơn điệu. Nội dung của luận văn được trình bày trong hai chương.

Chương 1 giới thiệu một số khái niệm và tính chất của không gian Banach lồi đều, có chuẩn khả vi Gâteaux đều, ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc, ánh xạ j-đơn điệu, toán tử giải trong không gian Banach; đồng thời trình bày phương pháp đường dốc nhất giải bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động của ánh xạ không giãn, phương pháp lai ghép đường dốc nhất, phương pháp điểm gần kề tìm không điểm của ánh xạ m-j-đơn điệu trong không gian Banach.

Chương 2 trình bày ba phương pháp điểm gần kề kết hợp với phương pháp đường dốc nhất (một phương pháp lặp ẩn và hai phương pháp lặp hiện) giải bài toán bất đẳng thức biến phân với ánh xạ giá là ánh xạ j-đơn điệu mạnh và giả co chặt, tập ràng buộc là tập không điểm chung của các ánh xạ m-j-đơn điệu trong không gian Banach lồi đều có chuẩn khả vi Gâteaux đều.

Luận văn được hoàn thành tại Trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên. Đầu tiên, tôi xin kính gửi lời cảm ơn chân thành và sâu sắc đến thầy GS.TS. Nguyễn Bường, người đã tận tình giúp đỡ tôi trong suốt quá trình làm luận văn.

Tôi xin gửi cám ơn đến các quý Thầy Cô trong khoa Toán - Tin của trường Đại học Khoa học Thái Nguyên đã tận tình truyền đạt kiến thức và kinh nghiệm quý báu cho tôi trong suốt quá trình tôi học tập tại trường.

Tôi xin gửi cám ơn đến các quý Thầy Cô trong Phòng Đào tạo của Trường Đại học Khoa học Thái Nguyên đã tạo điều kiện thuận lợi cho tôi hoàn thành chương trình học tập và thực hiện luận văn này.

Cuối cùng, tôi xin gửi lời cám ơn đến gia đình và bạn bè đã động viên, tạo điều kiện thuận lợi cho tôi hoàn thành luận văn này.

Thái Nguyên, tháng 10 năm 2018

Tác giả luận văn

Nguyễn Văn Hải

Chương 1

Giới thiệu bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian Banach

Chương này trình bày trong hai mục. Mục 1.1 giới thiệu khái niệm và trình bày một số tính chất của không gian Banach lồi đều có chuẩn khả vi Gâteaux đều, ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc, ánh xạ j-đơn điệu và toán tử giải trong không gian Banach. Mục thứ hai của chương giới thiệu về bài toán bất đẳng thức biến phân j-đơn điệu trong không gian Banach, trình bày phương pháp lai ghép đường dốc nhất giải bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động chung của các ánh xạ không giãn và phương pháp điểm gần kề trong trường hợp đặc biệt tìm không điểm của ánh xạ j-đơn điệu. Nội dung của chương được viết trên cơ sở các tài liệu [1]–[3], [11]–[14] và các tài liệu được tham chiếu trong đó.

1.1 Ánh xạ j-đơn điệu

Cho E là không gian Banach với không gian đối ngẫu ký hiệu là E^*. Ta dùng ký hiệu $\|.\|$ cho chuẩn trong E và E^* và viết tích đối ngẫu $\langle x, x^*\rangle$ thay cho giá trị của phiếm hàm tuyến tính $x^* \in E^*$ tại điểm $x \in E$, tức là $\langle x, x^*\rangle = x^*(x)$. Với một ánh xạ $A : E \to 2^E$, ta sẽ định nghĩa miền xác định, miền giá trị và đồ thị của nó tương ứng như sau:

$$\mathcal{D}(A) = \{x \in E : \ A(x) \neq \emptyset\},$$
$$\mathcal{R}(A) = \cup\{Az : \ z \in \mathcal{D}(A)\},$$

và

$$\mathcal{G}(A) = \{(x, y) \in E \times E : \ x \in \mathcal{D}(A), \ y \in A(x)\}.$$

Ánh xạ ngược A^{-1} của ánh xạ A được định nghĩa bởi:

$$x \in A^{-1}(y) \quad \text{nếu và chỉ nếu} \quad y \in A(x).$$

1.1.1 Không gian Banach lồi đều

Định nghĩa 1.1.1 Không gian Banach E được gọi là phản xạ, nếu với mọi phần tử $x^{**} \in E^{**}$, không gian liên hợp thứ hai của E, đều tồn tại phần tử $x \in E$ sao cho

$$x^*(x) = x^{**}(x^*) \quad \forall x^* \in E^*.$$

Nếu E là không gian Banach phản xạ thì mọi dãy bị chặn trong E đều có dãy con hội tụ yếu. Đó là nội dung của định lý sau đây.

Định lý 1.1.2 (xem [3]) *Cho E là không gian Banach. Khi đó, các khẳng định sau là tương đương:*

(i) E là không gian phản xạ.

(ii) Mọi dãy bị chặn trong E đều có một dãy con hội tụ yếu.

Ký hiệu $S_E := \{x \in E : \|x\| = 1\}$ là mặt cầu đơn vị của không gian Banach E. Sau đây là định nghĩa không gian Banach lồi chặt và lồi đều.

Định nghĩa 1.1.3 (i) Không gian Banach E được gọi là lồi chặt nếu với mọi điểm $x, y \in S_E$, $x \neq y$, suy ra

$$\|(1 - \lambda)x + \lambda y\| < 1 \quad \forall \lambda \in (0, 1).$$

(ii) Không gian Banach E được gọi là lồi đều nếu với mọi $\varepsilon \in (0, 2]$ và các bất đẳng thức $\|x\| \leq 1,\ \|y\| \leq 1,\ \|x - y\| \geq \varepsilon$ thỏa mãn thì tồn tại $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho $\|(x + y)/2\| \leq 1 - \delta$.

Mối liên hệ giữa không gian Banach lồi đều, lồi chặt và phản xạ được cho bởi định lý dưới đây.

Định lý 1.1.4 (xem [3]) *Mọi không gian Banach lồi đều đều là lồi chặt và phản xạ.*

Định nghĩa 1.1.5 Không gian Banach E được gọi là trơn nếu với mỗi điểm x nằm trên mặt cầu đơn vị S_E tồn tại duy nhất một phiếm hàm $g_x \in E^*$ sao cho $\langle x, g_x\rangle = \|x\|$ và $\|g_x\| = 1$.

Định nghĩa 1.1.6

(i) Chuẩn của không gian Banach E được gọi là khả vi Gâteaux nếu với mỗi $y \in S_E$ giới hạn

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \tag{1.1}$$

tồn tại với $x \in S_E$, ký hiệu $\langle y, \bigtriangledown\|x\|\rangle$. Khi đó $\bigtriangledown\|x\|$ được gọi là đạo hàm Gâteaux của chuẩn.

(ii) Chuẩn của E được gọi là khả vi Gâteaux đều nếu với mỗi $y \in S_E$, giới hạn (1.1) đạt được đều với mọi $x \in S_E$.

Mối liên hệ giữa không gian Banach trơn và tính khả vi Gâteaux của chuẩn được công bố trong định lý sau.

Định lý 1.1.7 (xem [3]) *Không gian Banach E là trơn khi và chỉ khi chuẩn của E khả vi Gâteaux trên $E \setminus \{0\}$.*

1.1.2 Ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc

Định nghĩa 1.1.8 Ánh xạ $J_s : E \to 2^{E^*},\ s > 1$ (nói chung là đa trị) xác định bởi

$$J_s x = \{u_q \in E^* :\ \ \langle x, u_s\rangle = \|x\|\|u_s\|,\ \|u_s\| = \|x\|^{s-1}\},$$